

非线性映象不动点集的迭代集合序列逼近

杨理平

(广东工业大学 应用数学系, 广东 广州, 510090)

摘要: 在 2—一致凸 Banach 空间的有界闭凸集中讨论第 5 类非扩张映象 T 的不动点集 $F(T)$ 的结构与它的迭代集合序列逼近, 得到 $F(T)$ 是非空的闭凸集, 所得结果包含了 Browder, Petryshyn, Singh 等人的某些结果.

关键词: 一致凸 Banach 空间; 有界闭凸集; 集合序列; 不动点集; 第 5 类非扩张型映象

中图分类号: O177.91

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2004)02-0086-07

设 (X, d) 是实度量空间, 映象 $T: X \rightarrow X$ 称为非扩张的是指: 对 $\forall x, y \in X$ 有:

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

显然非扩张映象是 Banach 压缩映象的推广. 由于寻求非扩张映象不动点具有其特殊的意义, 所以一直引起人们的关注. 按文献 [1] 的分类, 把非扩张型映象分为 5 类, 本文主要研究 2—一致凸 Banach 空间中非空有界闭凸集上第 5 类非扩张型映象 T 的不动点 $F(T)$ 的结构及其迭代集合序列逼近, 得到 $F(T)$ 是闭凸集; 同时提供一个集合序列迭代法, 使得由该方法构造的迭代集合序列, 在某些条件下强收敛于 T 的不动点, 且有相应的敛速估计.

所得结果包含了 Browder, Petryshyn 的相应结果, 同时在一定程度上推广了 Singh 的相应结果.

集合序列逼近是在点序列逼近的基础上发展起来的逼近方法, 是更加有用的逼近方法, 在迭代集合序列的每个集上取一点所构成的点序列迭代法均为本文方法的特例.

1 定义和引理

定义 1^[1] 设 (X, d) 是度量空间, 映象 $T: X \rightarrow X$ 称为第 5 类非扩张的是指: 对 $\forall x, y \in X$ 有:

$$d(Tx, Ty) \leq \left\{ d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx), \frac{1}{2}[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \right\}.$$

定义 2^[2] 设 B 是实 Banach 空间, 对 $\forall x, y \in B$, B 的凸性模

$$\delta_B(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 2 \right\}, \text{ 对 } 0 < \varepsilon \leq 2, \text{ 若 } \delta_B(\varepsilon) > 0, \text{ 则 } B \text{ 称为一致凸的; 若存在一常数 } c > 0, \text{ 使得 } \delta_B(\varepsilon) \geq c\varepsilon^p (p > 1), \text{ 则称 } B \text{ 是 } p\text{—一致凸的.}$$

取 $p = 2$, 由文献 [2] 中式 (3.1) 知, 当 B 是 2—一致凸的 Banach 空间时, 对 $\forall x, y \in B, 0 < \lambda < 1$, 就有

$$\| \lambda x + (1 - \lambda)y \|^2 \leq \lambda \|x\|^2 + (1 - \lambda) \|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)c \|x - y\|^2. \quad (1)$$

其中 $c > 0$. 不失一般性, 设 $0 < c < 1$.

收稿日期: 2003-03-17

作者简介: 杨理平 (1964), 男, 讲师, 主要研究方向为最优化理论与算法.

假设iv 设 B 是 2—一致凸的 Banach 实间, C 是 B 中的非空有界闭凸集, $T: C \rightarrow C$ 是第(5)类非扩张型映象, T 的不动点集 $F(T) \neq \emptyset$ (空集).

假设 ⑤ 1) 设 $\varepsilon_k > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$;

2) 设 $\mathbf{N}$ 是自然数集, 取 $a \in (0, 1]$, 设整数 $I_k = I(a, x_k) \leq I^0 \in \mathbf{N}$, 满足

$$\|T^i x_k - x_k\| \geq a \|Tx_k - x_k\| \quad (\forall x_k \in C, 1 \leq i \leq I_k).$$

定义3 迭代集合序列: 设 B 是 2—一致凸的 Banach 空间, C 是 B 中非空闭凸子集, T 是 C 中的第(5)类非扩张型映象, $\forall x_0 \in C, O_0 = \{x_0\}$ (单点集), 迭代集合序列

$$\{O_k\} = \{O_0, O_1, \dots, O_k, \dots\}, \quad (2)$$

其中 O_{k+1} 由 $\forall x_k \in O_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 按下面方法构造, $\forall y \in O_{k+1}$ 表为

$$y = \sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} x_{ij} + e_k \in C, \quad (3)$$

其中 $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} = 1$, $e_k \in \overline{B}(\theta, \varepsilon_k)$ (B 中以零元 θ 为中心以 ε_k 为半径的闭球, ε_k 满足假设 ⑤之1)), $x_{ij} = (1 - \alpha) x_k + \alpha T^i x_k$, $\alpha_1 = \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$. 此时称 $\{O_k\}$ 是由 $\{x_k\}$ 生成的迭代集合序列, 而称 $\{x_k\}$ 是迭代集合序列 $\{O_k\}$ 的生成点序列.

定义4 设 $\{O_k\}$ 是 2—一致凸 Banach 空间 B 中的集合序列, $O \subset B$, 若 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in O_n} \|y - x\| = 0$, 称集合序列 $\{O_n\}$ 强收敛于 O , 并记为 $O_k \rightarrow O (k \rightarrow \infty)$;

集合序列 $\{O_n\}$ 的强聚点集为: $\{O_n\}^* = \{x \in B \mid \exists \{Q_{n_i}\} \subset \{O_n\}, y_{n_i} \in O_{n_i}, y_{n_i} \rightarrow x (i \rightarrow \infty)\}$;

而点列 $\{x_n\}$ 的强聚点集为: $\{x_n\}^* = \{x \in B \mid \exists \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}, x_{n_i} \rightarrow x (i \rightarrow \infty)\}$.

引理1 在假设iv下, 设 $x \in C, x^* \in F(T), i \in \mathbf{N}$, 则有:

$$1) \|T^i x - x^*\| \leq \|T^{i-1} x - x^*\| \leq \dots \leq \|x - x^*\|;$$

$$2) \|T^i x - x\| \leq 2 \|x - x^*\|.$$

证: 因 $x^* \in F(T)$, T 是第(5)类非扩张型映象, 故有

$$\|T^i x - x^*\| = \|T(T^{i-1} x) - Tx^*\| \leq \max\{\|T^{i-1} x - x^*\|, \|T^{i-1} x - Tx^*\|, \|x^* - Tx^*\|,$$

$$\frac{1}{2}[\|T^{i-1} x - T^i x\| + \|x^* - Tx^*\|], \frac{1}{2}[\|T^{i-1} x - Tx^*\| + \|x^* - T^i x\|]\} \leq$$

$$\max\{\|T^{i-1} x - x^*\|, \frac{1}{2}[\|T^{i-1} x - x^*\| + \|T^i x - x^*\|]\}, \quad (4)$$

由上式推断必有 $\|T^i x - x^*\| \leq \|T^{i-1} x - x^*\|$ 成立. 事实上, 若否, 即

$$\|T^i x - x^*\| > \|T^{i-1} x - x^*\| \text{ 成立, 则 } \frac{1}{2}[\|T^{i-1} x - x^*\| + \|T^i x - x^*\|] < \|T^i x - x^*\|,$$

所以由式(4)即得 $\|T^i x - x^*\| < \|T^i x - x^*\|$ 矛盾. 故引理1的结论1)成立. 引理1的结论2)显然.

引理2 在假设iv与 ⑤下, 设 $\{x_n\} \subset C$ 是迭代集合序列 $\{O_n\}$ 生成的点序列, $x^* \in F(T)$,

$$\|x_{n_{i_0 j_0}} - x^*\| = \max\{\|x_{n_{ij}} - x^*\| \mid 1 \leq i \leq I_n, 1 \leq j \leq 2\}, \theta_n = \frac{\|Tx_n - x_n\|}{\|x_n - x^*\|}, \beta_n = [1 - \alpha(1 - \alpha)]$$

$ca^2\theta_n^2]^{1/2}$, 则有

$$1) \|y_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{j=n_0}^n \beta_j \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n r_j \leq \prod_{j=n_0}^n \beta_j \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n \xi_j,$$

其中 $\forall y_{n+1} \in O_{n+1}$, $\beta_j = \xi_{j+1} \dots \beta_n$;

$$2) \{ \|x_{n+1} - x^*\| \} \text{ 收敛.}$$

证: 1) 由假设 ⑤之 2) 知 $a \in (0, 1]$, 由引理 1 知 $\theta_n \leq 2$. 因 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $0 < c < 1$, 故

$\beta_n = [1 - \alpha(1 - \alpha)ca^2\theta_n^2]^{1/2} \in [0, 1]$. 由假设 ⑤ 引理 1, 定义 2 及式 (1) 知当 $y_{n+1} \in O_{n+1}$ 时, 有

$$\|y_{n+1} - x^*\| = \left\| \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} (x_{ij} - x^*) + e_n \right\| \leq \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \|x_{ij} - x^*\| + \|e_n\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \|x_{i_0 j_0} - x^*\| + \varepsilon_n = \|(1 - \alpha_{j_0})x_n + \alpha_{j_0} T^{i_0} x_n - x^*\| + \varepsilon_n = [\|(1 - \alpha_{j_0})(x_n - x^*) + \alpha_{j_0}(T^{i_0} x_n - x^*)\|^2]^{1/2} + \varepsilon_n \leq [(1 - \alpha_{j_0})\|x_n - x^*\|^2 + \alpha_{j_0}\|T^{i_0} x_n - x^*\|^2 - \alpha_{j_0}(1 - \alpha_{j_0})c\|T^{i_0} x_n - x_n\|^2]^{1/2} + \varepsilon_n \leq [\|x_n - x^*\|^2 - \alpha_{j_0}(1 - \alpha_{j_0})ca^2\|Tx_n - x_n\|^2]^{1/2} + \varepsilon_n = [\|x_n - x^*\|^2 - \alpha(1 - \alpha)ca^2\|Tx_n - x_n\|^2]^{1/2} + \varepsilon_n = [1 - \alpha(1 - \alpha)ca^2\theta_n^2]^{1/2} \|x_n - x^*\| + \varepsilon_n = \beta_n \|x_n - x^*\| + \varepsilon_n \leq \dots \leq \prod_{j=n_0}^n \beta_j \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n r_j \leq \prod_{j=n_0}^n \beta_j \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n \xi_j;$$

2) 由 1) 推出 $\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| + \varepsilon_n$, 故有

$$b_n = \|x_n - x^*\| + \sum_{j=n}^{\infty} \xi_j \geq \|x_{n+1} - x^*\| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j = b_{n+1}, \text{ 即 } \{b_n\} \text{ 是单调下降的, 而 } \sum_{j=n}^{\infty} \xi_j \text{ 亦}$$

单调下降, 所以由 $\|x_n - x^*\| = b_n - \sum_{j=n}^{\infty} \xi_j$ 知 $\{ \|x_n - x^*\| \}$ 收敛.

2 主要结果

定理 1 在假设 iv 与 ⑤下, 设 $\{O_n\}$ 是由点序列 $\{x_n\} \subset C$ 生成的迭代集合序列, δO_n 表示 O_n 的直径, r_n, θ_n, β_n 的意义同引理 2. 则有

1) 若存在 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, $b \in (0, 2]$, $x^* \in F(T)$, 使

$$\|Tx_{n_j} - x_{n_j}\| \geq b \|x_{n_j} - x^*\|, (j \in \mathbf{N}), \quad (5)$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $O_n \rightarrow \{x^*\}$ (即 $\sup_{y \in O_n} \|y - x^*\| \rightarrow 0$), $\sup_{y \in O_n} \|T^i y - y\| \rightarrow 0 (i \in \mathbf{N})$, $\delta O_n \rightarrow 0$;

0;

特别有

$x_n \rightarrow x^*$, $\|T^i x_n - x_n\| \rightarrow 0 (i \in \mathbf{N})$. 且有估计:

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \sup_{y \in O_n} \|y - x^*\| \leq \varepsilon_1(j, j_0, n) \leq \varepsilon_2(j, j_0, n), \quad (6)$$

$$\sup_{y \in O_n} \|T^i y - y\| \leq \|T^i x_{n+1} - x_{n+1}\| \leq 2\varepsilon_1(j, j_0, n) \leq 2\varepsilon_2(j, j_0, n), \quad (7)$$

$$\delta O_{n+1} \leq 2\varepsilon_1(j, j_0, n) \leq 2\varepsilon_2(j, j_0, n). \quad (8)$$

其中 $\varepsilon_1(j, j_0, n) = \beta^{j-j_0+1} \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n r_j$, $\varepsilon_2(j, j_0, n) = \beta^{j-j_0+1} \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n \xi_j$,

$\beta = [1 - \alpha(1 - \alpha)ca^2b^2]^{1/2} \in (0, 1), i, j, j_0, n_j, n_{j_0}, n \in \mathbf{N}, j_0 \leq j, n_j \leq n$.

2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0, \|T^i x_n - x_n\| \rightarrow 0 (i \in \mathbf{N}), \sup_{y \in O_{n+1}} \|T^i y - y\| \rightarrow 0 (i \in \mathbf{N}), \sup_{y \in O_{n+1}} \|y - x_n\| \rightarrow 0, \delta O_{n+1} \rightarrow 0$. 且有估计:

$$\|T^i x_n - x_n\| \leq i \|Tx_n - x_n\|, \quad (9)$$

$$\sup_{y \in O_{n+1}} \|y - x_n\| \leq I_n(1 - \alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n \leq I^0(1 - \alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n, \quad (10)$$

$$\delta O_{n+1} \leq 2[I_n(1 - \alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n] \leq 2[I^0(1 - \alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n], \quad (11)$$

$$\sup_{y \in O_{n+1}} \|T^i y - y\| \leq [2I_n(1 - \alpha) + i] \|Tx_n - x_n\| + 2\varepsilon_n \leq [2I^0(1 - \alpha) + i] \|Tx_n - x_n\| + 2\varepsilon_n. \quad (12)$$

证: 由引理2及式(5)推出

$\beta_{n_j} = [1 - \alpha(1 - \alpha)ca^2\theta_j^2]^{1/2} \leq [1 - \alpha(1 - \alpha)ca^2b^2]^{1/2} = \beta \in (0, 1)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, 则分别先在式(6) ~ (8)中令 $j \rightarrow \infty$, 再令 $j_0 \rightarrow \infty$, 则得全部收敛论断. 因此只须证估计式(6) ~ (8)即可.

由引理2, 对 $\forall x_{n+1} \in O_{n+1}$ 有

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{j=n_{j_0}}^n \beta_j \|x_{n_{j_0}} - x^*\| + \sum_{j=n_{j_0}}^n r_j \leq \varepsilon_1(j, j_0, n) \leq \varepsilon_2(j, j_0, n),$$

从而有 $\sup_{y \in O_{n+1}} \|y - x^*\| \leq \varepsilon_1(j, j_0, n) \leq \varepsilon_2(j, j_0, n)$, 而

$$\delta O_{n+1} = \sup_{y, y' \in O_{n+1}} \|y - y'\| \leq 2 \sup_{y \in O_{n+1}} \|y - x^*\| \leq 2\varepsilon_1(j, j_0, n) \leq 2\varepsilon_2(j, j_0, n).$$

由引理1有

$$\|T^i x_{n+1} - x_{n+1}\| \leq 2 \|x_{n+1} - x^*\| \leq 2\varepsilon_1(j, j_0, n) \leq 2\varepsilon_2(j, j_0, n) (i \in \mathbf{N})$$

所以 $\sup_{y \in O_{n+1}} \|T^i y - y\| \leq 2\varepsilon_1(j, j_0, n) \leq \varepsilon_1(j, j_0, n), (i \in \mathbf{N})$.

3) 现用反证法证明 $\|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 事实上, 若否, 则必存在 $\varepsilon > 0$ 与 $\{\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\|\} \subset \{\|Tx_n - x_n\|\}$, 使得 $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \geq \varepsilon, (i \in \mathbf{N})$. 又由引理2知 $\{\|x_n - x^*\|\}$ 有界, 故存在 $b \in (0, 2]$, 使

$$\frac{\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\|}{\|x_{n_i} - x^*\|} \geq \frac{\varepsilon}{\|x_{n_i} - x^*\|} \geq b,$$

由上式与1)之结论推出 $\|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 矛盾. 从而 $\|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

由 $\|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 在式(9) ~ (12)中, 令 $n \rightarrow \infty$ 即得所要证明的收敛结论. 故仅需证明估计式(9) ~ (12)即可. 由 $\|T^i x_n - T^{i-1} x_n\| \leq \|T^{i-1} x_n - T^{i-2} x_n\| \leq \dots \leq \|Tx_n - x_n\|, 1 - \alpha > \alpha$, 定义3, 假设 $\oplus$, 推出

$$\|T^i x_n - x_n\| \leq \|T^i x_n - T^{i-1} x_n\| + \|T^{i-1} x_n - T^{i-2} x_n\| + \dots + \|Tx_n - x_n\| \leq i \|Tx_n - x_n\|, (i, n \in \mathbf{N})$$

$$\|y_{n+1} - x_n\| = \left\| \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 a_{nj} (x_{nj} - x_n) + e_n \right\| \leq \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 a_{nj} \|x_{nj} - x_n\| + \|e_n\| =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{I_n} [\alpha_{i1} \|(1-\alpha)x_n + \alpha T^i x_n - x_n\| + \alpha_{i2} \|\alpha x_n + (1-\alpha) T^i x_n - x_n\|] + \|e_n\| = \sum_{i=1}^{I_n} [\alpha_{i1} \alpha \\
& + \alpha_{i2}(1-\alpha)] \|T^i x_n - x_n\| + \|e_n\| \leq (1-\alpha) \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \|T^i x_n - x_n\| + \varepsilon_n \leq (1-\alpha) \\
& \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 i \alpha_{ij} \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n \leq I_n(1-\alpha) \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n = I_n(1-\alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n \\
& \leq I^0(1-\alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n (\forall y_{n+1} \in O_{n+1}), \\
& y \in O_{n+1} \sup \|y - x_n\| \leq I_n(1-\alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n \leq I^0(1-\alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n, \\
& \delta O_{n+1} = \sup_{y, y' \in O_{n+1}} \|y - y'\| \leq 2 \sup_{y \in O_{n+1}} \|y - x_n\| \leq 2[I_n(1-\alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n] \leq 2[I^0(1-\alpha) \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n], \\
& y \in O_{n+1} \sup \|T^i y - y\| = y \in O_{n+1} \sup \|(T^i y - T^i x_n) + (T^i x_n - x_n) + (x_n - y)\| \leq \\
& y \in O_{n+1} \sup [2\|y - x_n\| + i\|Tx_n - x_n\|] \leq [2I_n(1-\alpha) + i]\|Tx_n - x_n\| + 2\varepsilon_n \leq \\
& [2I^0(1-\alpha) + i]\|Tx_n - x_n\| + 2\varepsilon_n (i, n \in \mathbf{N}).
\end{aligned}$$

定理 2 在定理 1 的假设下, 增设 T 是连续的, 则 $\{x_n\}^* \neq \emptyset$, 且

- 1) $\{O_n\}^* = \{x_n\}^* = \{x^*\} \subset F(T)$;
- 2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $O_n \rightarrow \{x^*\}$, $x_n \rightarrow x^*$, 且有估计

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| & \leq y \in O_{n+1} \sup \|y - x^*\| \leq \prod_{j=n_0}^n \beta_j \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n \tau_j \leq \\
& \prod_{j=n_0}^n \beta_j \|x_{n_0} - x^*\| + \sum_{j=n_0}^n \tau_j,
\end{aligned} \quad (13)$$

或

$$y \in O_{n+1} \sup \|y - x^*\| \leq \|x_{n+1} - x^*\| + 2[I^0(1-\alpha)] \|Tx_n - x_n\| + \varepsilon_n \quad (14)$$

证明: 1) 对 $\forall n, m \in \mathbf{N}$, 有 $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x^*\| + \|x_m - x^*\|$, 又由定理 1 中式(6)知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 而 B 是完备的, 因此存在 $y^* \in B$, 使得 $x_n \rightarrow y^* (n \rightarrow \infty)$ 显然 $x^* = y^*$. 因此 $\{x_n\}^* \neq \emptyset$. 又由定理 1 之 2) 与 T 的连续性, 有

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = \|Ty^* - y^*\| = 0$, 所以 $\{x_n\}^* \in F(T)$. 易知 $\{x_n\}^* \subset \{O_n\}^*$, 下证 $\{O_n\}^* \subset \{x_n\}^*$. 因 $\{O_n\}^* \neq \emptyset$, 故存在 $\{n_i\} \subset \mathbf{N}$, $y_{n_i} \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$, 同时由定理 1, 有

$$\|x_{n_i} - x^*\| \leq \|x_{n_i} - y_{n_i}\| + \|y_{n_i} - x^*\| \leq \delta O_{n_i} + \|y_{n_i} - x^*\| \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty),$$

因此 $\{O_n\}^* \subset \{x_n\}^*$, 故 $\{O_n\}^* = \{x_n\}^*$.

现用反证法证明 $\{x_n\}^* = \{x^*\}$. 事实上, 若否, 则存在

$x_1^*, x_2^* \in \{x_n\}^*$, $\|x_2^* - x_1^*\| > 0$, $\{x_{n_i}\}, \{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, 使得 $x_{n_i} \rightarrow x_1^* (i \rightarrow \infty)$, $x_{n_j} \rightarrow x_2^* (j \rightarrow \infty)$. 但由引理 2 与 $\sum_{j=n_0}^n \tau_j < \infty$ 知, 必存在 i_0 , 使 $n \geq n_{i_0}$ 时, 有 $\|x_n - x_1^*\| \leq \|x_{n_0} - x_1^*\| + \sum_{j=n_0}^n \tau_j < 2^{-1} \|x_1^* - x_2^*\|$, 此式说明 $x_{n_j} \rightarrow x_2^* (j \rightarrow \infty)$ 矛盾. 所以有 $\{x_n\}^* = \{x^*\}$.

2) 取 $\{x_n\} \subset \{x_n\}$ 使 $x_{n_i} \rightarrow x^* (i \rightarrow \infty)$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \infty$ 和引理 2, 知当 $n \geq n_i$ 时, 有 $\|x_n - x^*\|$

$\leq \|x_{n_i} - x^*\| + \sum_{j=n_i}^{\infty} j \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty \Rightarrow n \rightarrow \infty)$. 即 $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$. 又因为

$\|y - x^*\| \leq \|y - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\|$, 定理 1 之 2) 和 $\sum_{n=1}^{\infty} n < \infty$ 有

$$\sup_{y \in O_{n+1}^*} \inf_{x \in \{x^*\}} \|y - x^*\| = \sup_{y \in O_{n+1}^*} \|y - x^*\| \leq \|x_{n+1} - x^*\| + \delta O_{n+1} \leq$$

$\|x_{n+1} - x^*\| + 2[I^0(1-\alpha)\|Tx_n - x_n\| + n] \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 即 $O_n \rightarrow \{x^*\} (n \rightarrow \infty)$. 而式 (13) 由引理 2 得到.

注 1) 定理 2 从以下几方面拓广和改进了文献[3]中的主要结果: 其一将文献[3]中点序列逼近拓广为集合序列逼近, 从而更为有效, 且给出了敛速估计; 其二将 Hilbert 空间拓广为 2—一致凸的 Banach 空间; 其三将非扩张映象扩展为第 (5) 类非扩张型映象, 且省去了文献[3]中要求 T 为半紧的条件.

注 2) 定理 2 也是文献[4]中主要结果之推论在一定程度上的推广. 其一定理 2 证明了 T 的不动点一定存在; 其二用集合序列替代文献[4]中的点序列, 且有敛速估计.

而由文献[2]中的推论 2 知, 当 $1 < q \leq 2$ 时, 对 $\forall x, y \in L^q$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 有不等式: $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$ 成立, 从而有:

推论 1 在定理 1 的假设下, 设 T 连续, 则在 L^q 空间中, 定理 2 结论同样成立.

定理 3 在定理 1 的条件下设 T 连续, 则映象 T 的不动点集 $F(T)$ 是非空闭凸集.

证明: 由定理 2, 知 $F(T) \neq \emptyset$. 对 $\forall y_1^*, y_2^* \in F(T)$, $0 < \alpha < 1$, 现证

$y^* = (1-\alpha)y_1^* + \alpha y_2^* \in F(T)$. 因 C 凸, 故 $y^* \in C$. 由引理 1 之 1) 有:

$\|Ty^* - y_1^*\| \leq \|y^* - y_1^*\|$, $\|Ty^* - y_2^*\| \leq \|y^* - y_2^*\|$, 而 $y_2^* - y_1^* = (1-\alpha)(y_1^* - y_2^*)$, 故得

$$\|y_1^* - y_2^*\| \leq \|y_1^* - Ty^*\| + \|Ty^* - y_2^*\| \leq \|y_1^* - y^*\| + \|y^* - y_2^*\| = \alpha\|y_1^* - y_2^*\| + (1-\alpha)\|y_1^* - y_2^*\| = \|y_1^* - y_2^*\|,$$

所以有 $\|y_1^* - Ty^*\| + \|Ty^* - y_2^*\| = \|y_1^* - Ty^* + Ty^* - y_2^*\|$, 若 $y_1^* - Ty^* = 0$, 则

$\|Ty^* - y_2^*\| = \|y_1^* - y_2^*\| \leq \|y - y_2^*\| = (1-\alpha)\|y_1^* - y_2^*\|$, 又 $0 < \alpha < 1$, 故上式不可能成立, 从而 $y_1^* - Ty^* = 0$ 不可能; 同理 $Ty^* - y_2^* = 0$ 亦不可能, 又 B 是 2—一致凸, 故必严格凸,

因此存在 $\lambda > 0$, 使得 $Ty^* - y_1^* = \lambda(y_2^* - Ty^*)$, 故 $Ty^* = (1-\beta)y_1^* + \beta y_2^*$, 其中 $\beta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. 于是有 $Ty^* - y_1^* = \beta(y_2^* - y_1^*)$, 从而 $\beta\|y_2^* - y_1^*\| = \|Ty^* - y_1^*\| \leq \|y^* - y_1^*\| = \alpha\|y_2^* - y_1^*\|$, 由得 $\beta \leq \alpha$; 又 $Ty^* - y_2^* = (1-\beta)(y_1^* - y_2^*)$, 类似地可得 $\beta \geq \alpha$, 故 $\beta = \alpha$. 因此有 $Ty^* = (1-\alpha)y_1^* + \alpha y_2^* = y^*$, 即 $y^* \in F(T)$. 故 $F(T)$ 是凸的.

对 $\forall x_n \in F(T)$, $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$, 由定理 1 之 2) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = \|Tx^* - x^*\| = 0$, 即 $x^* \in F(T)$, 所以 $F(T)$ 是闭的.

参考文献:

[1] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[2] Xu Hongkun. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1991, 16(12): 1127-1138.

[3] Browder F, Petryshyn W. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces[J]. J. Math. Anal, 1967, 20:

- [4] Singh K L. (Generalized contractions and sequence of iterates) Nonlinear equations in abstract spaces[M]. Lakshmikantham: Lakshmikantham 1978: 439-462.
- [5] 雷晋干, 黄象鼎. 算子方程投影解法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1987.

Iterative Approximation of Set Sequences of Fixed Point Set for a Kind of Nonlinear Mapping

YANG Li-ping

(Dept. of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: Let B be a 2-uniformly convex Banach space, C be a nonempty closed convex subset of B , and T be the fifth nonexpansive mapping. The structure of its fixed point set $F(T)$ and the iterative approximation of its set sequences are discussed. It proves that $F(T)$ is a nonempty closed convex set. This paper generalizes and extends some of Browder's, Petryshyn's and Singh's results.

Key words: uniformly convex Banach space; a bounded closed convex set; set sequences; fixed point set; the fifth nonexpansive mapping

(上接第 80 页)

Control of Design Quality for Cement Concrete Pavement of High Class Highway

HE Neng¹, LUO Zhi-qiang²

(1. Guangdong Provincial Shenzhen City Highway Engineering Corporation, Shenzhen 518024, China;

2. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510643, China)

Abstract: According to the problems of quality control for cement concrete pavement in expressway, the thickness design of concrete surface and base structure, the concrete pavement structure form, and the design standard of deck surface paving course and lapping plate at the bridge beginnings are discussed; the design of the filtration draining in pavement and the freezing control cushion are comprehensively considered. It is pointed out that the open draining on the curved section of concrete pavement is not permitted. It is the purpose that the cement concrete pavement of high quality and durability in expressway can be constructed through the design and the overall management and control of construction.

Key words: concrete pavement; design quality; deck surface paving course; lapping plate at bridge beginnings; drain design